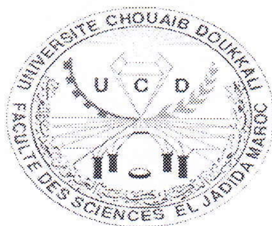






UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
EL JADIDA

**Groupe de Physique Théorique**
**Laboratoire de Physique de la Matière Condensée**

**Filière**
**Sciences de la Matière Physique**
**–SMP5–**

**Module**
**Mécanique Quantique**

exosup.com

AHMED JELLAL[1]

---

# TRAVAUX DIRIGÉS AVEC SOLUTIONS

---

[1] jellal.ucd@gmail.com

exosup.com page facebook

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTMENT DE PHYSIQUE
EL JADIDA

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2015/2016
FILIÈRE : SMP
PHYSIQUE : M31
MODULE : MECANIQUE QUANTIQUE

# SERIE 1

**Exercice 1 :** Les opérateurs $\hat{A}_i$, avec $(i = 1, \cdots, 6)$, sont définis comme suit

$$\hat{A}_1\psi(x) = [\psi(x)]^2, \qquad \hat{A}_4\psi(x) = x^2\psi(x) \tag{1}$$
$$\hat{A}_2\psi(x) = \frac{d\psi(x)}{dx}, \qquad \hat{A}_5\psi(x) = \sin(\psi(x)) \tag{2}$$
$$\hat{A}_3\psi(x) = \int_a^x \psi(x')dx', \qquad \hat{A}_6\psi(x) = \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \tag{3}$$

1- Lesquels sont linéaires?

2- Lesquels sont hermitiques (auto-adjoints)?

**Exercice 2 :** $\hat{A}, \hat{A}_1, \hat{A}_2$ étant des opérateurs linéaires, démontrer les relations suivantes :

$$(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}, \qquad (\hat{A}_1\hat{A}_2)^\dagger = \hat{A}_2^\dagger\hat{A}_1^\dagger, \qquad (\hat{A}_1 + \hat{A}_2)^\dagger = \hat{A}_1^\dagger + \hat{A}_2^\dagger \tag{4}$$
$$(\hat{A}^n)^\dagger = (\hat{A}^\dagger)^n, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

**Exercice 3 :** A l'instant $t = 0$, on considère un paquet d'onde $\psi(x, 0)$ à une dimension, de position moyenne $x_0$ et d'impulsion moyenne $p_0$, défini par

$$\psi(x, 0) = e^{i\frac{p_0 x}{\hbar}} f(x - x_0), \qquad f(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{6}$$

La transformée de Fourier de $f$ a pour expression :

$$\tilde{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{px}{\hbar}} f(x)dx = C\frac{\sigma}{\sqrt{\hbar}} e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2\hbar^2}} \tag{7}$$

1- Donner l'expression de $\tilde{\psi}(p, 0)$ et tracer l'allure de $|\psi(x, 0)|^2$ et $\left|\tilde{\psi}(p, 0)\right|^2$.

2- Le paquet d'onde évolue librement donc il est décrit par le Hamiltonien

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \tag{8}$$

Déterminer l'expression de $\tilde{\psi}(p, t)$.

3- Faire l'approximation à l'ordre 1 en $p$ de $H$

$$H(p) \simeq H(p_0) + (p - p_0)\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{p=p_0} \tag{9}$$



exosup.com page facebook

pour en déduire l'expression de $\psi(x,t)$ et tracer la courbe de $|\psi(x,t)|^2$.
4- Même question que précédemment en poussant le développement jusqu'à l'ordre 2 en $p$.
5- Application à un électron ($m \simeq 10^{-30}kg$) et à un grain de poussière ($m \simeq 10^{-15}kg$). On prendra $\sigma = 10^{-6}m$.

**Exercice 4 :** Pour décrire une particule confinée sur un cercle $S_1$ (par exemple, un électron dans un petit fil conducteur circulaire appelé fil quantique), l'espace de Hilbert est l'espace des fonctions de carré sommable périodiques $L^2(S_1)$. Si le fil est de londueur $L$, c'est l'espace des fonctions vérifiant:

$$\psi(x+L) = \psi(x) \tag{10}$$

Montrer que les fonctions $V_k$ définies par

$$V_k(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left(ik\frac{2\pi x}{L}\right), \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{11}$$

forment une base orthonormée de cet espace.

**Exercice 5 :** Montrer que la distribution de Dirac $\delta$ peut être représentée comme la limite d'une lorentzienne :

$$y(x,\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}, \qquad \varepsilon > 0 \tag{12}$$

Il existe d'autres représentations possibles :

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} e^{\frac{-|x|}{\varepsilon}}, \qquad \delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{\frac{-x^2}{\varepsilon^2}} \tag{13}$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi}\frac{\sin(\frac{x}{\varepsilon})}{x}, \qquad \delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\pi}\frac{\sin^2(\frac{x}{\varepsilon})}{x^2} \tag{14}$$

**Exercice 6 :** Soit $\hat{A}$ un opérateur hermitique dont la valeur moyenne est définie par

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi^*(x) A \psi(x) dx \tag{15}$$

Puisque l'opérateur et la fonction d'onde peuvent dépendre du temps, la valeur moyenne $\langle A \rangle$ sera généralement dépendante du temps.
1- Montrer que

$$\frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = \langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle \tag{16}$$

où $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ est le Hamiltonien du système.
2- Application aux observables $\hat{x}$ et $\hat{p}$ dans le cas d'une particule sans spin plonger dans un potentiel scalaire et stationnaire. Comparer le résultat obtenu aux équations classique de Hamilton-Jacobi

$$\frac{dx_{\text{cl}}}{dt} = \frac{1}{m}p_{\text{cl}}, \qquad \frac{dp_{\text{cl}}}{dt} = -\frac{dV(x_{\text{cl}})}{dx_{\text{cl}}} \tag{17}$$

Indication : utiliser la relation suivante

$$[\hat{p}, V(\hat{x})] = (-i\hbar)\frac{dV(x)}{dx} \tag{18}$$



exosup.com page facebook

que l'on démontrera lorsque $V$ est un polynôme.

**Exercice 7 :** Le but de l'exercice est de démontrer le lemme suivante. Si le commutateur de deux opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ commute avec chacun d'eux

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 \tag{19}$$

on trouve l'identité de Glauber

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} \tag{20}$$

Pour cela, nous allons procéder par les étapes suivants :

1- Montrer que

$$[\hat{B}, \hat{A}^n] = n\hat{A^{n-1}}[\hat{B}, \hat{A}]. \tag{21}$$

En déduire

$$[\hat{B}, e^{-\hat{A}x}] = -xe^{-\hat{A}x}[\hat{B}, \hat{A}] \tag{22}$$

où $x$ est un paramétre.

2- Considérons l'opérateur dépendant du paramétre $x$

$$\hat{f}(x) = e^{\hat{A}x} e^{\hat{B}x} \tag{23}$$

Déterminer l'expression de $\frac{d\hat{f}(x)}{dx}$ en fonction de $\hat{A}, \hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]$ et $\hat{f}(x)$. On integre l'équation différentielle ainsi obtenue, en déduire l'identité (20).

**Exercice 8 :** Soit deux quantités physiques décrites par les opérateurs hermitiques $\hat{A}$ et $\hat{B}$.

1- En écrivant le commutateur de $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sous la forme

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C} \tag{24}$$

montrer que $\hat{C}$ est un opérateur hermitique.

2- Démontrer la relation d'incertitude de Heisenberg sur ces deux observables

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right| \tag{25}$$



exosup.com page facebook

**Ex-1 :**

1°/ Opérateur linéaire :

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\psi_1(x), \psi_2(x) \in \mathcal{H}$, on a

$$\hat{A}\left[\lambda_1 \psi_1(x) + \lambda_2 \psi_2(x)\right] = \lambda_1 \hat{A}\psi_1(x) + \lambda_2 \hat{A}\psi_2(x)$$

**Applicat°**

(*) $\hat{A}_1 \psi(x) = \left[\psi(x)\right]^2$

- $\hat{A}_1\left[\lambda_1 \psi_1(x) + \lambda_2 \psi_2(x)\right] = \left[\lambda_1 \psi_1(x) + \lambda_2 \psi_2(x)\right]^2$

$\neq$ $\quad = |\lambda_1|^2 \psi_1^2(x) \ldots$

- $\lambda_1 \hat{A}\psi_1(x) + \lambda_2 \hat{A}\psi_2(x) = \lambda_1 \left(\psi_1(x)\right)^2 + \lambda_2 \left[\psi_2(x)\right]^2$

$\Rightarrow$ $\hat{A}_1$ est non-linéaire

(**) $\hat{A}_2 \psi(x) = \frac{d}{dx}\psi(x)$

$$\hat{A}_2\left[\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2\right] = \frac{d}{dx}\left[\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2\right]$$

$$= \lambda_1 \frac{d\psi_1}{dx} + \lambda_2 \frac{d\psi_2}{dx}$$

$$= \lambda_1 \hat{A}_2 \psi_1 + \lambda_2 \hat{A}_2 \psi_2$$

$\Rightarrow$ $\hat{A}_2$ est linéaire

(**) de m pour $A_3, A_4, A_6$.

(**) $\hat{A}_5$ non-linéaire.

exosup.com

exosup.com page facebook

2°) opérateur hermitique :

$$\langle \varphi|\hat{A}|\varphi\rangle = \langle \varphi|\hat{A}|\varphi\rangle^* \Leftrightarrow \boxed{\langle \hat{A}\varphi|\varphi\rangle = \langle \varphi|\hat{A}\varphi\rangle}$$

* $\langle \varphi|\hat{A}_1|\varphi\rangle = \int \bar{\varphi}(x)\,[\varphi(x)]^2\,dx$

$$\langle \hat{A}_1\varphi|\varphi\rangle = \int [\bar{\varphi}(x)]^2\,\varphi(x)\,dx$$
$$\neq$$
$$\langle \varphi|\hat{A}_1|\varphi\rangle = \int \bar{\varphi}(x)\,[\varphi(x)]^2\,dx$$

$\Big\}$ $\hat{A}_1$ est non hermitique

de même pour $A_3$, $A_5$

(x) $\hat{A}_4\varphi(x) = x^2\varphi(x)$

$$\langle \hat{A}_4\varphi|\varphi\rangle = \int x^2\bar{\varphi}(x)\,\varphi(x)\,dx$$
$$=$$
$$\langle \varphi|\hat{A}_4|\varphi\rangle = \int \bar{\varphi}(x)\,x^2\varphi(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ $\hat{A}_4$ est hermitique

de même pour $\hat{A}_6$

EX2 :

on $\boxed{\langle \varphi|\hat{A}^+|\varphi\rangle = \langle \hat{A}\varphi|\varphi\rangle}$

ou bien $\langle \varphi|\hat{A}^+|\varphi\rangle = \langle \varphi|\hat{A}|\varphi\rangle^*$

Application $\boxed{(A^+)^+ = A}$

Posons $|x\rangle = A^+|\varphi\rangle \Longrightarrow \langle x| = \langle\varphi|A^+$

on a $\langle\varphi|x\rangle = \langle\varphi|A^+|\varphi\rangle$

$= \langle x|\varphi\rangle^*$

$\langle x|\varphi\rangle = \langle\varphi|A^+|\varphi\rangle = \langle\varphi|(A^+)^+|\varphi\rangle^*$

$= \langle\varphi|x\rangle^*$

$= \langle\varphi|A|x\rangle^*$

$$\Longrightarrow \boxed{(A^+)^+ = A}$$

**(xx)** $\underline{(\hat{A}_1\hat{A}_2)^+ = \hat{A}_2^+\hat{A}_1^+}$

Posons $|x\rangle = \hat{A}_1\hat{A}_2|\varphi\rangle \longrightarrow \langle x| = \langle\varphi|\hat{A}_2^+\hat{A}_1^+$

$\langle\varphi|x\rangle = \langle\varphi|\hat{A}_1\hat{A}_2|\varphi\rangle$

$= \langle\varphi|(\hat{A}_1\hat{A}_2)^+|\varphi\rangle^*$

$= \langle x|\varphi\rangle^*$

$= \langle\varphi|\hat{A}_2^+\hat{A}_1^+|\varphi\rangle^+$

$$\Longrightarrow \boxed{(\hat{A}_1\hat{A}_2)^+ = \hat{A}_2^+\hat{A}_1^+}$$

de même pour les autres.

exosup.com page facebook

Ex 3 :

$$\psi(x,0) = e^{\frac{i p_0 x}{\hbar}} f(x - x_0)$$

$$f(x) = c\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} f(x)\, dx = \frac{c\sigma}{\sqrt{\hbar}} e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2\hbar^2}}$$

1°| (*) Expression de $\tilde{\psi}(p,0)$ :

TF $\tilde{\psi}(p,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \psi(x,0)\, dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(p-p_0)\frac{x}{\hbar}} f(x - x_0)\, dx$$

Changement $x = x' + x_0 \Rightarrow dx = dx'$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(p-p_0)(x'+x_0)/\hbar} f(x')\, dx'$$

$$= \frac{e^{-i(p-p_0)x_0/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(p-p_0)x'/\hbar} f(x')\, dx'$$

$$\boxed{\tilde{\psi}(p,0) = e^{-i(p-p_0)x_0/\hbar}\, \tilde{f}(p - p_0)}$$

$$\Rightarrow \tilde{\psi}(p,0) = e^{-i(p-p_0)x_0/\hbar} \frac{c\sigma}{\sqrt{\hbar}} e^{-(p-p_0)^2\frac{\sigma^2}{2\hbar^2}}$$

(**) Allure de $|\psi(x,0)|^2$, $|\tilde{\psi}(p,0)|^2$

$$|\psi(x,0)|^2 = f^2(x - x_0) = c^2 e^{-\frac{(x-x_0)^4}{4\sigma^4}} = c^2 e^{-\frac{(x-x_0)^4}{\Delta x^4}}$$

$$|\tilde{\psi}(p,0)|^2 = \tilde{f}^2(p - p_0) = \frac{c^2\sigma^2}{\hbar} e^{-(p-p_0)^4\frac{\sigma^4}{4\hbar^4}} = \frac{c^2\sigma^2}{\hbar} e^{-\frac{(p-p_0)^4}{\Delta p^4}}$$

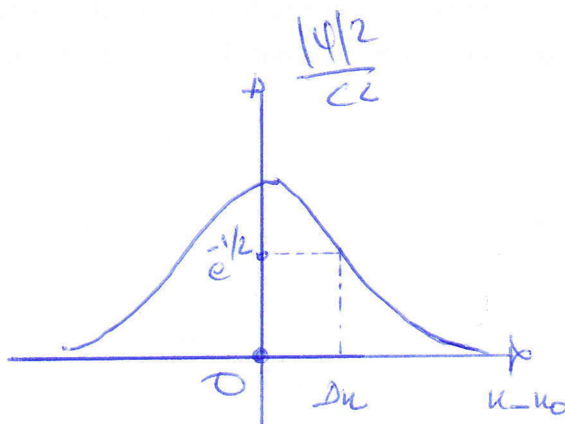
exosup.com page facebook

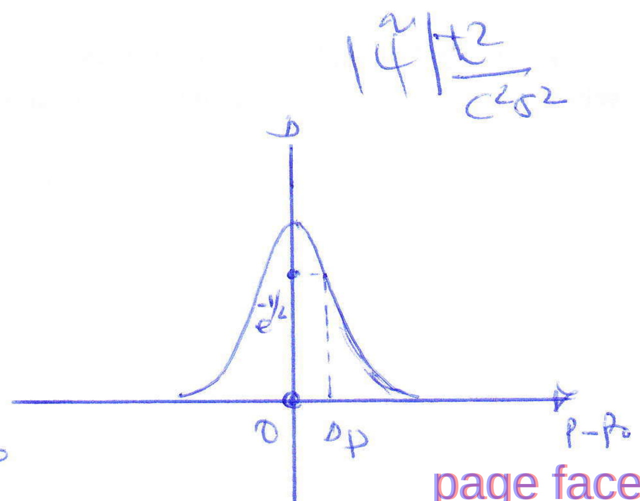
L'écart quadratique moyen
(Variance)

$$(\Delta A)^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x \big)_{\psi(x_0)} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \\ \Delta p \big)_{\tilde{\psi}(p_0)} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\sigma} \end{array} \right\}$$ Check home

- Valeur moyenne de $\hat{x}$ est $x_0$
- ______ $\hat{p}$ est $p_0$




exosup.com page facebook

2°| Hamiltonien d'une particule libre

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}.$$

$\tilde{\psi}(p,t) = ?$

or $i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi\rangle$

$\tilde{\psi}(p) = \langle p|\tilde{\psi}\rangle$

$$\hat{H}|\tilde{\psi}(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\psi}(t)\rangle.$$

$$\Rightarrow \langle p|\hat{H}|\tilde{\psi}(t)\rangle = \langle p|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\psi}(t)\rangle$$

$$\frac{p^2}{2m}\tilde{\psi}(p,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}(p,t)$$

Car $\hat{H}|p\rangle = \frac{p^2}{2m}|p\rangle$

$\longrightarrow$ intégration $\tilde{\psi}(p,t) = e^{-\frac{iH(p)t}{\hbar}}\tilde{\psi}(p,0)$

Voir question 1

3°| or $H(p) = H(p_0) + (p-p_0)\left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_{p=p_0}$

$$= \frac{p_0^2}{2m} + (p-p_0)\frac{p_0}{m} = -\frac{p_0^2}{2m} + \frac{p\,p_0}{m}$$

Posons $\begin{cases} p_0 = mv \\ E = \frac{1}{2}mv^2 \end{cases} \Rightarrow$ $H(p) = -E + vp$

exosup.com

exosup.com page facebook

(7)

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx/\hbar}\, \tilde{\psi}(x,t)\, dp.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx/\hbar}\, e^{-iH(p)t/\hbar}\, \tilde{\psi}(p,0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx/\hbar}\, e^{\frac{-it}{\hbar}(-E+pv)}\, \tilde{\psi}(p,0)\, dp$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{ipx}{\hbar}}\, e^{\frac{-it}{\hbar}(-E+vp)}\, e^{-i(p-p_0)x_0/\hbar}\, c\frac{\sigma}{\sqrt{\hbar}}\, e^{-\frac{(p-p_0)^2\sigma^2}{2\hbar^2}}\, dp$$

$$= e^{\frac{iEt}{\hbar}} \frac{\sigma\,\sigma}{\hbar\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}\left[px - tvp - (p-p_0)x_0\right]}\, e^{-(p-p_0)^2\frac{\sigma^2}{2\hbar^2}}\, dp$$

(the circled integral term) $= \psi(x - vt, 0)$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(x,t) = e^{\frac{iEt}{\hbar}}\, \psi(x-vt,0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi(x,t)|^2 = |\psi(x-vt,0)|^2}$$

<u>m̂ Courbe</u>

<u>que $|\psi(x,0)|^2$</u>

exosup.com page facebook

4°| Developpement à l'ordre 2.

$$H(p) = H(p_0) + (p-p_0)\frac{\partial H}{\partial p}\Big|_{p=p_0} + \frac{(p-p_0)^2}{2!}\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\Big|_{p=p_0}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p}\Big|_{p=p_0} = \frac{p_0}{m}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\Big|_{p=0} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{2m}\right)_{p=p_0} = \frac{1}{2m}$$

$$\Rightarrow \quad H(p) = H(p_0) + (p-p_0)\frac{p_0}{2m} + \frac{(p-p_0)^2}{2m}$$

$$\Downarrow$$

ni Calcul

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{c^2\sigma^2}{\left(\sigma^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2}\right)^{1/2}} \exp\left[-\frac{\sigma^2 (x-x_0-vt)^2}{\sigma^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2}}\right]$$

$\Rightarrow$ Variance

$$\Delta(x(t)) = \left[\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\hbar^2 t^2}{2m^2\sigma^2}\right]^{1/2}$$

$$= \left[(\Delta x(t=0))^2 + \left(\frac{\Delta p(t=0)}{m}t\right)^2\right]^{1/2}$$

5°| Application numérique

Pour $\Delta x(t) = 10\,\Delta x(t=0)$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{2m}{\hbar}\sqrt{99}\,(\Delta x_0)^2$$

$$\Delta x_0 = \sigma/\sqrt{2}$$

- Electron $t \simeq 2 \cdot 10^{-7}$
- Poussière $t = 2 \times 10^{+8}\,s \simeq 6$ ans

exosup.com page facebook

Exercice 4 : Fonctions

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik\frac{2\pi}{L}x} \quad , k \in \mathbb{Z}$$

(*) Orthogonalité :

$$\langle \psi_k | \psi_\ell \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L e^{i(\ell-k)\frac{2\pi x}{L}} dx$$

• Pour $\ell = k$ on a

$$\langle \psi_k | \psi_\ell \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L dx = \frac{1}{L} \left[ x \right]_0^L$$

$$= 1 \Longrightarrow \text{normé}$$

• Pour $\ell \neq k$.

on pose $\ell - k = m$, $m$ entier

donc $$\langle \psi_k | \psi_\ell \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L e^{im\frac{2\pi x}{L}} dx.$$

Famille libre ⇐ $$\left\{ \begin{aligned} &= \frac{1}{L} \frac{1}{\frac{im2\pi}{L}} \left[ e^{im\frac{2\pi x}{L}} \right]_0^L \\ &= \frac{1}{im2\pi} \left[ \underbrace{e^{im2\pi}}_{1} - 1 \right] = 0 \end{aligned} \right.$$

Donc $\langle \psi_k | \psi_\ell \rangle = \delta_{k\ell}$ avec

$$\delta_{k\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell. \end{cases}$$

exosup.com page facebook

(*) Décomposit° :

$\phi(x)$ est une fct périodique :

$$\phi(x+L) = \phi(x)$$

Donc d'après le théorème des séries de Fourier

on peut écrire

$$\phi(x) = \sum_k \frac{\phi_k}{\sqrt{L}} e^{ik\frac{2\pi x}{L}}$$

$$= \sum_k \phi_k \, \psi_k(x)$$

$\Rightarrow \{\psi_k\}$ est une famille génératrice

C/C : $\{\psi_k\}$ est une base orthonormée.

Ex5 : Fonction delta de Dirac est défini par

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ \infty & , x = 0 \end{cases}$$

Montrer que $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} y(x,\varepsilon)$

avec $y(x,\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$ , $\varepsilon > 0$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} y(x,\varepsilon)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[ \operatorname{Arctg} \frac{x}{\varepsilon} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 1$

exosup.com page facebook

Considérons l'intégrale :

$$F(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(x/\varepsilon)\, dx$$

avec $f(x)$ est une fonction continue et bornée.

Posons $x = \varepsilon z$

$$\Rightarrow F(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon z)\, g(z) \quad (*)$$

avec $g(z) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{z^2+1}$

et bien sûr $\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, dz = 1$

$(*)$ est ~~uni fem~~ uniformément convergente

Car il existe $M \in \mathbb{R}$ (indépendant de $\varepsilon$) tq $|f(\varepsilon z) g(z)| \leq M g(z)$. Donc $F(\varepsilon)$ est

continue

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon z) g(z) dz = F(0)$$

$$= f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\, dz = f(0)$$

$\Downarrow$

pic de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x-y)\, dx = f(y).$$

exosup.com
exosup.com page facebook

Ex 6 :

Un opérateur $\hat{A}$ tq sa moyenne est hermitique

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi^*(x) A \psi(x)\, dx$$

Théorème d'Ehrenfest

1°/ Montrer que

$$\frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle$$

on a $\quad i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = H\psi(x) \Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H|\psi\rangle$

$$\Rightarrow \quad -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi | = \langle \psi | H$$

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{A} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle \psi|\right) \hat{A} |\psi\rangle + \langle \psi | \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} |\psi\rangle + \langle \psi | \hat{A} \left(\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle\right)$$

$$= -\frac{1}{i\hbar} \langle \psi | \hat{H}\hat{A} | \psi \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | \hat{A} H | \psi \rangle$$

$$= \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle.$$

2°/ Application

- $$\frac{d\langle \hat{x} \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} \right\rangle^{0} + \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{x}, \hat{H}] \rangle = \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[\hat{x}, \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)\right] \right\rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[\hat{x}, \frac{\hat{p}^2}{2m}\right] \right\rangle = \frac{1}{m} \langle \hat{p} \rangle \quad (1)$$

exosup.com page facebook

• ~~$\frac{d\vec{p}}{dt}$~~ $\frac{d\langle \hat{\vec{p}}\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{\vec{p}},\hat{H}]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{\vec{p}},V(x)]\rangle$

$= -\left\langle \frac{d\hat{V}(\hat{x})}{dt}\right\rangle \qquad (2)$

Soit F : la force.

$$F = -\frac{dV(\hat{x})}{dt}$$

Les equat° d'Ehrenfest :

Equat° quantique : $\langle F\rangle = m\frac{d^2\langle \hat{x}\rangle}{dt^2}$ : analogue à l'equat° de Newton

En effet

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{dx_{cl}}{dt} = \dot{x}_{cl} = \frac{1}{m}P_{cl}\\ \dot{P}_{cl} = \frac{dV(x_{cl})}{dt} = -F\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ~~F=~~ $\ddot{x}_{cl} = \frac{1}{m}\dot{P}_{cl} = -\frac{F}{m}$

$\Rightarrow \boxed{F = -m\,\ddot{x}_{cl}}$

exosup.com page facebook

Ex 7 :



1°/ $[\hat{B},\hat{A}^n] = n\,\hat{A}^{n-1}[\hat{B},\hat{A}]$

Pour $n=2$

$[\hat{B},\hat{A}^2] = \hat{A}[\hat{B},\hat{A}] + [\hat{B},\hat{A}]\hat{A} = (\ldots)$

Puisque $[\hat{A},[\hat{B},\hat{A}]] = 0$ donc

$= [\hat{B},\hat{A}^2] = 2\hat{A}[\hat{B},\hat{A}]$

Supposons que cette relation est vraie à l'ordre $n-1$

$[\hat{B},\hat{A}^{n-1}] = (n-1)\,\hat{A}^{n-2}[\hat{B},\hat{A}]$

Mais qu'elle est vraie à l'ordre $n$ :

On a $[\hat{B},\hat{A}^n] = \hat{A}[\hat{B},\hat{A}^{n-1}] + [\hat{B},\hat{A}]\hat{A}^{n-1}$

$= \hat{A}(n-1)\hat{A}^{n-2}[\hat{B},\hat{A}] + \hat{A}^{n-1}[\hat{B},\hat{A}]$

$= (n+1-1)\,\hat{A}^{n-1}[\hat{B},\hat{A}]$

$\Rightarrow \boxed{[\hat{B},\hat{A}^n] = n\,\hat{A}^{n-1}[\hat{B},\hat{A}]}$

exosup.com page facebook

**Deduction :**

$$\left[\hat{B}, e^{-\hat{A}u}\right] = -u\, e^{-\hat{A}u}\left[\hat{B},\hat{A}\right].$$

**Developpements :**

$$e^{-\hat{A}u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \hat{A}^n u^n$$

**Donc**

$$\left[\hat{B}, e^{-\hat{A}u}\right] = \left[\hat{B}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \hat{A}^n u^n\right]$$

$$= \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n!} \underbrace{\left[\hat{B}, \hat{A}^n\right]}_{n\hat{A}^{n-1}\left[\hat{B},\hat{A}\right]} u^n$$

$$= \sum_{n!} \frac{(-1)^n}{n!} n \hat{A}^{n-1} u^n \left[\hat{B},\hat{A}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} u\, u^{n-1} \hat{A}^{n-1} \left[\hat{B},\hat{A}\right]$$

$p = n-1$

$$= -u\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} (u)^p \hat{A}^p\right)\left[\hat{B},\hat{A}\right]$$

$$\boxed{\left[\hat{B}, e^{-\hat{A}u}\right] = -u\, e^{-\hat{A}u}\left[\hat{B},\hat{A}\right]}$$

2°/ Opérateur dépendant de $u$.

$$\hat{f}(u) = e^{\hat{A}u} e^{\hat{B}u}$$

Expression de $\frac{d\hat{f}(u)}{du}$ :

on a
$$\begin{cases} \frac{d e^{\hat{A}u}}{du} = \hat{A} e^{\hat{A}u} \\ \frac{d e^{\hat{B}u}}{du} = \hat{B} e^{\hat{B}u} \end{cases}$$

$$\frac{d\hat{f}}{du} = \left(\frac{d e^{\hat{A}u}}{du}\right) e^{\hat{B}u} + e^{\hat{A}u}\left(\frac{d e^{\hat{B}u}}{du}\right)$$

$$= \hat{A} e^{\hat{A}u} e^{\hat{B}u} + e^{\hat{A}u} \hat{B} e^{\hat{B}u}$$

$$= \left(\hat{A} + e^{\hat{A}u} \hat{B} e^{-\hat{A}u}\right) \hat{f}(u).$$

D'après 1°/ on a $[\hat{B}, e^{-\hat{A}u}] = \hat{B} e^{-\hat{A}u} - e^{-\hat{A}u}\hat{B}$

$$\Rightarrow \hat{B} e^{-\hat{A}u} = e^{-\hat{A}u}\hat{B} + [\hat{B}, e^{-\hat{A}u}]$$

$$[\hat{B}, e^{-\hat{A}u}] = -u e^{-\hat{A}u}[\hat{B}, \hat{A}]$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{f}}{du} = \left[\hat{A} + e^{\hat{A}u}\left(e^{-\hat{A}u}\hat{B} - u e^{-\hat{A}u}[\hat{B}, \hat{A}]\right)\right] \hat{f}(u)$$

$$= \left(\hat{A} + \hat{B} - u[\hat{B}, \hat{A}]\right) \hat{f}(u)$$

exosup.com page facebook

$$\Rightarrow \quad \frac{d\hat{f}(u)}{du} = \left(\hat{A} + \hat{B} + u\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right)\hat{f}(u)$$

Equat° différentielle.

Intégration :

ar $\left[A+B, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = 0$

$$\int \frac{d\hat{f}(u)}{du} = \int \left(\hat{A} + \hat{B} + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]u\right)\hat{f}(u)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(u) = \hat{f}(0)\, e^{(\hat{A}+\hat{B})u + \frac{1}{2}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]u^2}$$

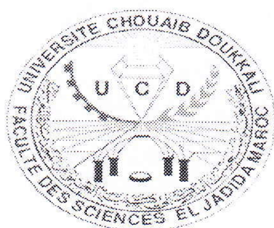
avec $f(0) = 1\!\!1$.

Pour $u = 1$, on $\hat{f}(1) = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}$

$$= e^{(\hat{A}+\hat{B}) + \frac{1}{2}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}\, e^{\hat{B}}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]}}$$

exosup.com page facebook







UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
EL JADIDA

**Groupe de Physique Théorique**
**Laboratoire de Physique de la Matière Condensée**

**Filière**
**Sciences de la Matière Physique**
**–SMP5–**

**Module**
**Mécanique Quantique**

AHMED JELLAL[1]

---

# TRAVAUX DIRIGÉS AVEC SOLUTIONS

---

[1]jellal.ucd@gmail.com

exosup.com page facebook

Universite Chouaib Doukkali
Faculte Des Sciences
Department De Physique
El Jadida

Annee Universitaire : 2015/2016
Filière : Smp
Physique : M31
Module : Mecanique Quantique

# SERIE 2

**Exercice 1 :** On considère un oscillateur harmonique à deux dimensions dont le Hamiltonien est donné par la forme suivante :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{k}{2}\hat{x}^2 + \frac{k}{2}\hat{y}^2 \tag{1}$$

qui peut se séparer en deux parties

$$\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y \tag{2}$$

1- Montrer que $\hat{H}_x$ et $\hat{H}_y$ sont deux opérateurs qui commutent.
2- Définir les opérateurs des annihilations et créations relativement à chaque Hamiltonien.
3- Calculer les relations de commutations entre les operateurs obtenus.
4- Déterminer le spectre d'energie pour chaque Hamiltonien.
5- En déduire le spectre d'énergie pour le Hamiltonien (1).
6- Etudier la dégénérescence du système.

**Exercice 2 :** Refaire la même analyse que celle de l'exercice 1 mais cette fois ci pour un oscillateur harmonique à trois dimensions décrit par le Hamiltonien :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{k}{2}\hat{x}^2 + \frac{k}{2}\hat{y}^2 + \frac{k}{2}\hat{z}^2 \tag{3}$$

**Exercice 3 :** Le modèle d'Einstein pour la capacité calorifique des solides est basé sur la notion de l'oscillateur harmonique à trois dimensions. Ce modèle traite donc un solide constitué de $N$ ions comme un ensemble de $3N$ oscillateurs unidimensionnels, identiques (même masse $m$ et constante $k$), indépendants. Un état stationnaire de ce système est un produit tensoriel (exercice 2) d'états stationnaires des oscillateurs élémentaires, identifié donc par leurs nombres d'excitation respectifs $n_1, n_2, \cdots n_{3N}$. Le résultat du modèle est presenté dans la Figure 1.

On veut retrouver le résultat présenté ci-dessus. Pour cela on utilise l'approche de l'oscillateur harmonique dont le Hamiltonien est donné par l'équation (3), qui a pour énergies propres

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right), \qquad n = n_x + n_y + n_z = 0, 1, 2, \cdots . \tag{4}$$

Tout système en équilibre à la température $T$ fluctue. A la température nulle, l'atome est dans le niveau $|0\rangle$ d'énergie le plus bas. Mais à une température $T$ plus élevée, il peut être dans le niveau $|n\rangle$, d'énergie $E_n$ avec la probabilité est donnée par la loi de Boltzmann

$$P_n = \frac{1}{Z}e^{-\beta E_n} \tag{5}$$



exosup.com page facebook

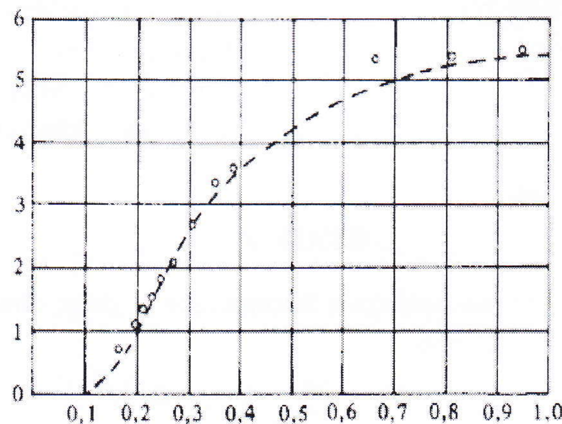



Figure 1: Les valeurs de la chaleur spécifique molaire, en calories par mole par degé $K$ (1 calorie $\approx$ 4,18 Joule) sont représentées en fonction de $k_B T/\hbar\omega = 1/\beta\hbar\omega$. Les ronds représentent les valeurs expérimentales de la chaleur spécifique du diamant. En trait interrompu, les valeurs de l'expression théorique obtenue à travers le modèle d'Einstein.

où $\beta = \frac{1}{k_b T}$ avec $k_B$ est la constante de Boltzmann. La constante de normalisation $Z$ est la fonction de partition

$$Z = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta E_n} \tag{6}$$

1- Montrer que l'énergie moyenne du système est donnée par

$$\langle E \rangle = \sum_{n \geq 0} P_n E_n \tag{7}$$

$$= 3N \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \tag{8}$$

2- Déduire la capacité calorifique molaire

$$C(T) = 3N k_B \left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)} \tag{9}$$

3- Etudier les limites $T \ll \frac{\hbar\omega}{k_B}$ et $T \gg \frac{\hbar\omega}{k_B}$ de la capacité calorifique $C(T)$.
4- Tracer $C(T)$ en fonction de $\frac{1}{\beta\hbar\omega}$.

**Exercice 4 : A faire chez vous**

Comme deuxième application de l'oscillateur harmonique, on veut étudier le mouvement dans le plan $(x, y)$ d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. Pour cela on suppose que ce champ est orienté selon l'axe $z$ tel que $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Le Hamiltonien d'une particule de charge $e$ dans un champ magnétique est donné par le couplage minimal, en remplaçant l'impulsion $\vec{p}$ par le terme $\vec{p} - e\vec{A}$ :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 \tag{10}$$



exosup.com page facebook

où $\vec{A}$ est le potentiel vecteur associé à $\vec{B}$. En choisissant la jauge de Landau pour fixer $\vec{A}$ tel que

$$\vec{A} = (0, Bx, 0) \tag{11}$$

1- Montrer que (10) peut s'écrire comme

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}(\hat{p}_y + eB\hat{x})^2 \tag{12}$$

$$= \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{e^2B^2}{2m}\left(\hat{x} + \frac{\hat{p}_y}{eB}\right)^2 \tag{13}$$

2- Montrer que la fonction d'onde de $\hat{H}$ est séparable :

$$\psi(x, y) = \phi(x)e^{\frac{i}{\hbar}p_y y} \tag{14}$$

3- Introduisons la fréquence cyclotron et la longeur magnétique

$$\omega_c = \frac{eB}{m}, \qquad l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \tag{15}$$

ainsque effectuons le changement $\hat{x}' = \hat{x} - \frac{l_B^2}{\hbar}\hat{p}_y$, pour avoir le Hamiltonien (12) comme

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_c^2\hat{x}'^2 \tag{16}$$

Définir les opérateurs d'annihilation et création pour écrire (16) sous la forme suivante :

$$\hat{H} = \hbar\omega_c\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \tag{17}$$

4- Déduire son spectre d'énergie.
5- Supposons que le système est fini suivant la direction $y$, soit disant de longeur $L_y$. En utilisant des conditions aux limites périodiques dans cette direction :

$$\psi(x, y + L_y) = \psi(x, y) \tag{18}$$

montrer que les valeurs de $p_y$ sont quantifiées

$$p_y = \frac{2\pi\hbar n_y}{L_y}, \qquad n_y = 0, 1, 2, \cdots \tag{19}$$

6- Le flux correspondant à notre système de surface $S = L_xL_y$ est $\Phi = BS$. Montrer que la dégénérescence du système est donnée par

$$N = \frac{\Phi}{\Phi_0} \tag{20}$$

avec $\Phi_0 = \frac{1}{eh}$ est le flux unité.



exosup.com page facebook

# Série 2

**Ex1 :** L'oscillateur harmonique à 2D peut être considéré comme 2 oscillateurs harmoniques de même masse (m) et fréquence (k) mais découplés. Le Hamiltonien correspondant est :

$$H = \frac{1}{2m}\left(\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2\right) + \frac{k}{2}\left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right)$$

$$= \hat{H}_x + \hat{H}_y$$

1°/ avec $[\hat{H}_x, \hat{H}_y] = 0 \Rightarrow$ $\hat{H}_x$ et $\hat{H}_y$ ont une base commune formée par ses états propres.

2°/ (*) Diagonalisation de $\hat{H}_x$ :

$$\hat{H}_x = \frac{1}{2m}\hat{P}_x^2 + \frac{k}{2}\hat{x}^2 \text{ : OH à 1D}$$

(Voir cours)

$\Rightarrow$ Opérateurs d'annihilation et création :

$$\begin{cases} a_x = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} \hat{x} + i\left(\frac{1}{2\hbar\omega m}\right)^{1/2} \hat{P}_x \\ a_x^+ = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} \hat{x} - i\left(\frac{1}{2\hbar\omega m}\right)^{1/2} \hat{P}_x \end{cases}$$

3°/ Puisque $[\hat{x}, \hat{P}_x] = i\hbar \mathbb{I} \Rightarrow [a_x, a_x^+] = \mathbb{I}$

exosup.com

page facebook

4°/ $\Rightarrow$ $\hat{H}_x = \hbar\omega\left(a_x^+ a_x + \frac{1}{2}\mathbb{I}\right)$

Equation aux valeurs propres :

$$\hat{H}_x|n_x\rangle = E_{n_x}|n_x\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{n_x} = \hbar\omega\left(n_x + \frac{1}{2}\right) \\ |n_x\rangle = \frac{(a_x^+)^{n_x}}{\sqrt{n_x!}}|0_x\rangle \end{cases}, \underline{n_x \in \mathbb{N}}$$

(**) <u>Diagonalisation de $\hat{H}_y$ :</u>

De la même façon on obtient

$$\hat{H}_y = \hbar\omega\left(a_y^+ a_y + \frac{1}{2}\mathbb{I}\right)$$

$$E_{n_y} = \hbar\omega\left(n_y + \frac{1}{2}\right)$$

$$|n_y\rangle = \frac{(a_y^+)^{n_y}}{\sqrt{n_y!}}|0_y\rangle \quad , \underline{n_y \in \mathbb{N}}$$

5°/ Pour le Hamiltonien total <u>on a</u>

$$\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y$$

Donc la base commune est :

$$|n_x, n_y\rangle = |n_x\rangle \otimes |n_y\rangle$$

exosup.com page facebook

D'où $\hat{H}|n_x,n_y\rangle = (\hat{H}_x + \hat{H}_y)|n_x,n_y\rangle = E_{n_x n_y}|n_x,n_y\rangle$

$$= \hat{H}_x|n_x,n_y\rangle + \hat{H}_y|n_x,n_y\rangle$$

$$= (E_{n_x} + E_{n_y})|n_x,n_y\rangle$$

$$\Rightarrow \quad E_{n_x n_y} = E_{n_x} + E_{n_y}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_{n_x n_y} = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)}$$

et $\boxed{|n_x,n_y\rangle = \frac{(a_x^+)^{n_x}(a_y^+)^{n_y}}{\sqrt{n_x!\,n_y!}}|0,0\rangle}$

avec $\boxed{|0_x,0_y\rangle = |0,0\rangle}$

## 6°| Dégénérescence

Rappel :

$E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$

$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$

$|0\rangle$ : Vide

Pour l'oscillateur harmonique à 1D il n'y a pas de dégénérescence car chaque valeur propre correspond à un état propre.

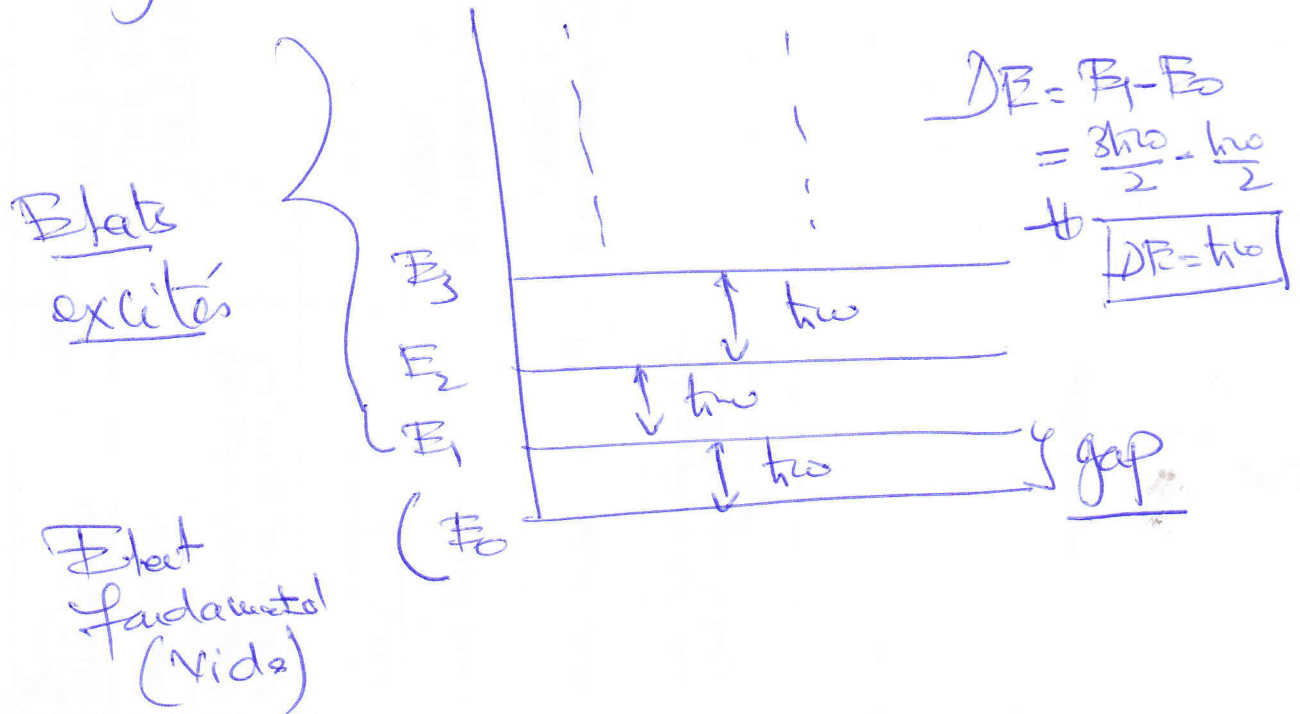
En effet,

exosup.com page facebook

Valeurs propres
$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \longrightarrow |0\rangle$$
$$E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2} \longrightarrow |1\rangle$$
$$E_2 = \frac{5\hbar\omega}{2} \longrightarrow |2\rangle$$
$$E_4 = \frac{7\hbar\omega}{2} \longrightarrow |3\rangle$$
$\vdots$

Vecteurs propres

Diagramme d'énergie :




Pour OH à 2D :

On a :
$$E_{n_x n_y} = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)$$
$$|n_x, n_y\rangle \quad , \quad n_x, n_y \in \mathbb{N}$$

exosup.com page facebook

On calcule les énergies et les états propres correspondants pour les premiers niveaux :

- $E_{00} = \hbar\omega \longrightarrow |0,0\rangle$ : Etat fondamental
- $E_{10} = 2\hbar\omega \longrightarrow |1,0\rangle$
  $E_{01} = 2\hbar\omega \longrightarrow |0,1\rangle$ $\Rightarrow E_{01} = E_{10} = 2\hbar\omega$ : $|1,0\rangle$, $|0,1\rangle$
  Cette énergie est 2 fois dégénérée
- $E_{02} = 3\hbar\omega \longrightarrow |0,2\rangle$
  $E_{20} = 3\hbar\omega \longrightarrow |2,0\rangle$
  $E_{11} = 3\hbar\omega \longrightarrow |1,1\rangle$ $\Rightarrow E_{02} = E_{20} = E_{11} = 3\hbar\omega$ : $|0,2\rangle$, $|2,0\rangle$, $|1,1\rangle$
  3 fois dégénérée

⋮

Ainsi de suite. On conclut que OH à 2D est un système dégénéré.

**Ex2** : Oscillateur harmonique à 3D est donc la somme de OH à 1D :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2\right) + \frac{k}{2}\left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2\right)$$
$$= \hat{H}_x + \hat{H}_y + \hat{H}_z$$

exosup.com

exosup.com page facebook

⑥

1e/ Spectre d'énergie

On montre $[\hat{H}_x, \hat{H}_y] = [\hat{H}_x, \hat{H}_z] = [\hat{H}_y, \hat{H}_z] = 0$

$\Rightarrow$ $\hat{H}_x, \hat{H}_y$ et $\hat{H}_z$ possèdent une base commune de ses vecteurs propres.

Opérateur d'annihilation et création :

$$\begin{cases} a_i = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} \hat{x}_i + i\left(\frac{1}{2\hbar\omega m}\right)^{1/2} \hat{P}_i \\ a_i^{+} = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} \hat{x}_i - i\left(\frac{1}{2\hbar\omega m}\right)^{1/2} \hat{P}_i \end{cases}$$

avec $i = x, y, z$ ou bien

$\hat{x}_1 = \hat{x}$, $\hat{x}_2 = \hat{y}$, $\hat{x}_3 = \hat{z}$

$\hat{P}_1 = \hat{P}_x$, $\hat{P}_2 = \hat{P}_y$, $\hat{P}_3 = \hat{P}_z$.

$$\Rightarrow [a_i, a_j^{+}] = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \hbar\omega\left(a_x^{+}a_x + a_y^{+}a_y + a_z^{+}a_z + \tfrac{3}{2}\mathbb{I}\right)$$

$$= \hbar\omega \sum_{i=1}^{3} \left(a_i^{+}a_i + \tfrac{3}{2}\mathbb{I}\right)$$

Les états propres de $\hat{H}$ st donnés par

$$|n_x, n_y, n_z\rangle = |n_x\rangle \otimes |n_y\rangle \otimes |n_z\rangle$$

$$= \frac{(a_x^{+})^{n_x} (a_y^{+})^{n_y} (a_z^{+})^{n_z}}{\sqrt{n_x!\, n_y!\, n_z!}} |0, 0, 0\rangle$$

exosup.com page facebook

Les valeurs propres :

$$\hat{H}|n_x n_y n_z\rangle = E_{n_x n_y n_z}|n_x n_y n_z\rangle$$

$n_x n_y n_z \in \mathbb{N}$

$$= \left(\hat{h}_x + \hat{h}_y + \hat{h}_z\right)|n_x n_y n_z\rangle$$

$$= \left(E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z}\right)|n_x n_y n_z\rangle$$

$$\Rightarrow \quad E_{n_x n_y n_z} = E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega\left(n_x + n_y + n_z + 3/2\right)}$$

2°) Dégénérescence :

- $E_{000} = \frac{3\hbar\omega}{2} \longrightarrow |0,0,0\rangle$ : Etat fondamental

- $E_{100} = \frac{5\hbar\omega}{2} \longrightarrow |1,0,0\rangle$
  $E_{010} = \frac{5\hbar\omega}{2} \longrightarrow |0,1,0\rangle$
  $E_{001} = \frac{5\hbar\omega}{2} \longrightarrow |0,0,1\rangle$
  $\Rightarrow \frac{5\hbar\omega}{2}$ ← $|1,0,0\rangle$, $|0,1,0\rangle$, $|0,0,1\rangle$ : 3 fois dégénérée

- $E_{002} = \frac{7\hbar\omega}{2} \longrightarrow |0,0,2\rangle$
  $E_{020} = \frac{7\hbar\omega}{2} \longrightarrow |0,2,0\rangle$
  $E_{200} = \frac{7\hbar\omega}{2} \longrightarrow |2,0,0\rangle$
  $E_{110} = \frac{7\hbar\omega}{2} \longrightarrow |1,1,0\rangle$
  $E_{101} = \frac{7\hbar\omega}{2} \longrightarrow |1,0,1\rangle$
  $E_{011} = \frac{7\hbar\omega}{2} \longrightarrow |0,1,1\rangle$
  $\Rightarrow \frac{7}{2}\hbar\omega$ est 6 fois dégénéré

⋮

exosup.com page facebook

**Ex3 :** Considérons un solide de N atomes et chaque atome est assimilé à un oscillateur à 3D.

- A température nulle, un atome se trouve dans l'état fondamental $|0\rangle \equiv |0,0,0\rangle$ d'énergie $E_0 \equiv E_{000}$,
- A une température $T \neq 0$, l'atome est dans l'état $|n\rangle \equiv |n_x, n_y, n_z\rangle$ avec une probabilité :

$$P_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}$$

avec
- $\beta = \frac{1}{k_B T}$, $k_B$ : cte de Boltzmann
- $E_n = \hbar\omega \left(n + 3/2\right)$, $\boxed{n = n_x + n_y + n_z}$
- $Z$ : Fonction de partition (constante de normalisation de $P_n$).

$$Z = \text{Tr}\, e^{-\beta E_n}$$

1°) **Energie moyenne :**

on a $\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n e^{-\beta E_n}}{Z}$$

exosup.com page facebook

Dans notre cas $Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} E_n e^{-\beta E_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}} \Rightarrow \boxed{\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}}$$

Calculons $Z$ :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \sum_{n_x=0}^{+\infty} \sum_{n_y=0}^{+\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega\left(n_x+n_y+n_z+3/2\right)}$$

$$\Rightarrow Z = e^{-3/2\beta\hbar\omega}\left(\sum_{n_x=0}^{+\infty} e^{-\beta\hbar\omega n_x}\right)\left(\sum_{n_y=0}^{+\infty} e^{-\beta\hbar\omega n_y}\right)\left(\sum_{n_z=0}^{+\infty} e^{-\beta\hbar\omega n_z}\right)$$

On a des suites géométriques et donc

$$\boxed{\sum_{n_x=0}^{+\infty} e^{-\beta\hbar\omega n_x} = \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}}$$

$$\Rightarrow Z = \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\right)^3$$

Donc $\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -3\frac{\partial}{\partial \beta}\left[-\frac{\beta\hbar\omega}{2} - \ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)\right]$

$$\Rightarrow \boxed{\langle E \rangle = \frac{3\hbar\omega}{2} \coth\left(\beta\frac{\hbar\omega}{2}\right)}$$ Pour un atome

Par Atome

$$\langle E \rangle_N = N \langle E \rangle$$

$$\Longrightarrow \boxed{\langle E_N \rangle = \frac{3N}{2} \hbar\omega \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}$$

2°) Capacité Calorifique :

$$C_V = \frac{\partial \langle E \rangle_N}{\partial T} = \frac{\partial \langle E \rangle_N}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial T}$$

avec

$$\frac{\partial \beta}{\partial T} = \frac{-1}{k_B T^2}$$

$$\frac{\partial \langle E \rangle_N}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{3N\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{3N\hbar\omega}{2} \times \frac{\hbar\omega}{2}\right)\left(\frac{-1}{\sinh^2\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{C_V = 3Nk_B \left(\frac{\frac{\beta\hbar\omega}{2}}{\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}\right)^2}$$

avec $N$ : Nbre d'atomes du solide

exosup.com
exosup.com page facebook

3° | • À haute température : $T \gg \frac{\hbar\omega}{k_B}$ $\Rightarrow$

$\beta\hbar\omega \ll 1$ on peut développer $\sinh x \approx x$, donc

$$\boxed{C_V \approx 3N k_B}$$ c'est une constante indépendante de la température c'est donc analogue au comportement de $C_V$ à haute température sur la Figure (série 2).

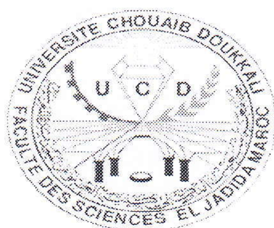
• À basse température, le solide est dans l'état fondamental ($n=0$) d'énergie $NE_0$, dont l'énergie moyenne est $\langle E \rangle_N = NE_0 = \underline{cte}$ $\Rightarrow$

$$\frac{\partial \langle E \rangle_N}{\partial T} = \frac{N \partial E_0}{\partial T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C_V = 0}$$ $\equiv$ analogue au comportement de $C_V$ sur la Figure à basse température

exosup.com

page facebook







UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
EL JADIDA

**Groupe de Physique Théorique**
**Laboratoire de Physique de la Matière Condensée**

**Filière**
**Sciences de la Matière Physique**
**–SMP5–**

**Module**
**Mécanique Quantique**

AHMED JELLAL[1]

---

# TRAVAUX DIRIGÉS AVEC SOLUTIONS

---

[1]jellal.ucd@gmail.com

exosup.com page facebook

# Complément : Oscillateur Harmonique

## Méthode analytique :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{k}{2}\hat{x}^2 \quad , \quad k = cte$$

Equation aux valeurs propres :

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\cancel{\psi(x)} + \frac{k}{2}x^2\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{km}{\hbar^2}x^2\right)\psi(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}E\psi(x) \qquad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\alpha = \left(\frac{\hbar^2}{km}\right)^{1/4} = \left(\frac{\hbar}{\omega m}\right)^{1/2}$$

**Changement :** avec

$$q = \alpha x \Rightarrow \frac{d}{dx} = \frac{dq}{dx}\frac{d}{dq} = \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dq}$$

~~$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dq^2}\psi(q) - \frac{km}{\hbar^2}\alpha^4 q^2\right)\psi = -\alpha^2\frac{2m}{\hbar^2}E\psi.$~~

avec $\alpha = \left(\frac{\hbar}{\omega m}\right)^{1/2}$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dq^2} - q^2\right)\psi = -\varepsilon\psi \quad (*) \qquad \text{avec } \boxed{\varepsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}}$$

exosup.com page facebook

Fonction d'essaie :

Solution simple : $\varphi_0 \sim e^{-q^2/2}$ vérifiant (*) :

$$\frac{d}{dq} e^{-q^2/2} = -q\, e^{-q^2/2} \Rightarrow \frac{d^2}{dq^2} e^{-\frac{q^2}{2}} = \frac{d}{dq}\left(-q\, e^{-q^2/2}\right)$$

$$= \left(-e^{-q^2/2} + q^2 e^{-q^2/2}\right)$$

On remplace dans (*) :

$$-e^{-q^2/2} + q^2 e^{-q^2/2} - q^2 e^{-q^2/2} = -\varepsilon\, e^{-q^2/2}$$

$$(-1 + q^2 - q^2) = -\varepsilon \Rightarrow \boxed{\varepsilon = 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}}$$

Supposons que $\varphi = e^{-q^2/2} H(q)$

$$\frac{d\varphi(q)}{dq} = \frac{d}{dq}\left(e^{-q^2/2} H(q)\right) = -q\, e^{-q^2/2} H(q) + e^{-q^2/2} \frac{dH(q)}{dq}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dq^2}\varphi(q) = \frac{d}{dq}\left[-q\, e^{-q^2/2} H(q) + e^{-q^2/2}\frac{dH(q)}{dq}\right]$$

$$= -e^{-q^2/2} H(q) + q^2 e^{-q^2/2} H(q) - q\, e^{-q^2/2}\frac{dH(q)}{dq}$$

$$- q\, e^{-q^2/2}\frac{dH(q)}{dq} + e^{-q^2/2}\frac{d^2H(q)}{dq^2}$$

Donc (*) devient

exosup.com
page facebook

$$\left( - e^{-q^2/2} H(q) + q^2 e^{-q^2/2} H(q) - 2q\, e^{-q^2/2} H(q) + e^{-q^2/2} \frac{dH(q)}{dq} - q^2 e^{-q^2/2} H(q) \right) = \mathcal{E}\, e^{-q^2/2} H(q)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 H(q)}{dq^2} - 2q \frac{dH(q)}{dq} - (1-\mathcal{E}) H(q) = 0} \quad (**)$$

C'est l'équation différentielle de Hermite

On cherche une solution sous forme de série :

$$h(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots$$

$$h'(q) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n q^{n-1} = a_1 + 2a_2 q + 3a_3 q^2 \cdots$$

$$h''(q) = 2a_2 + 2.3 a_3 q + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} q^n$$

$$(**) \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+1)(n+2) a_{n+2} q^n - 2q\, n a_n q^{n-1} + (\mathcal{E}-1) a_n q^n \right] = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \Big[ \underbrace{(n+1)(n+2) a_{n+2} - 2n a_n + (\mathcal{E}-1) a_n}_{=0} \Big] q^n = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(n+1)(n+2)\, a_{n+2} - 2n a_n + (\mathcal{E}-1) a_n = 0}$$

exosup.com page facebook

$\Rightarrow$ relation de récurrence :

$$a_{n+2} = \frac{2n+1-\varepsilon}{(n+1)(n+2)} a_n$$

pair

$n=0$ $\quad a_2 = \frac{1-\varepsilon}{2} a_0$

$n=2$ $\quad a_4 = \frac{5-\varepsilon}{12}$

impair

$n=1$ : $\quad a_3 = \frac{3-\varepsilon}{6} a_1$

$n=3$ : $\quad a_5 = \frac{7-\varepsilon}{20} a_3$

$$H(q) = h_{pair}(q) + h_{impair}(q)$$

$h_{pair}(q) = a_0 + a_2 q^2 + \cdots$

$h_{impair}(q) = a_1 + a_3 q^3 + \cdots$

Pb : ~~les solutions ne sont pas toutes~~ pas toutes les solutions sont normalisables :

Si $n$ est très grand alors

$$a_{n+2} \simeq \frac{2n}{n^2} a_n = \frac{2}{n} a_n$$

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x\right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

$\Rightarrow a_n \simeq \frac{c}{(j/2)!} \Rightarrow h(q) \simeq c \sum_n \frac{1}{(n/2)!} q^n$

$$\simeq c \sum_n \frac{1}{n!} q^{2n}$$

$$= c\, e^{+q^2}$$

exosup.com

page facebook

$\Rightarrow$ $h(q) \longrightarrow \infty$ lorsque $q \rightarrow \infty$

donc il faut limité la série de $H(q)$

a certain nombre

donc pour une valeur maximale de $n$ on

doit avoir $a_{n_{max}+2} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\varepsilon = 2n_{max}+1}$$

$n_{max} = n$

$n = j$

donc $\boxed{E = \frac{1}{2}\hbar\omega(2n_{max}+1)}$

$$a_{j+2} = \frac{-2(n-j)}{(j+1)(j+2)} a_j$$

Etat d'état :

Pour $n=0 \Rightarrow H(q) = a_0 \Rightarrow$

$a_2 = 0 \; (j=0)$

$\psi_0(q) = a_0 e^{-q^2/2}$

$a_0$ qlq $\neq 0$

$n=1$ : la série paire est nulle $\Rightarrow (a_0 = 0)$

$a_3 = 0$ $\Rightarrow a_3 = 0$

$\Rightarrow h_1(q) = a_1 q \Rightarrow \psi_1(q) = a_1 q e^{-q^2/2}$

$n=2$ : (série impaire est nulle)

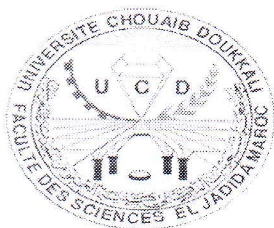
$\Rightarrow$ $j = 0 \,|\, j = 2$

$a_2 = -2a_0$ $a_4 = 0$

$\Rightarrow h_2(q) = a_0(1-2q^2)$

$\Rightarrow \psi_2(q) = a_0(1-2q^2)\, e^{-q^2/2}$

exosup.com page facebook







UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
EL JADIDA

**Groupe de Physique Théorique**
**Laboratoire de Physique de la Matière Condensée**

**Filière**
**Sciences de la Matière Physique**
**–SMP5–**

**Module**
**Mécanique Quantique**

AHMED JELLAL[1]

---

# TRAVAUX DIRIGÉS AVEC SOLUTIONS

---

[1]jellal.ucd@gmail.com

exosup.com page facebook

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTMENT DE PHYSIQUE
EL JADIDA

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2015/2016
FILIÈRE : SMP
PHYSIQUE : M31
MODULE : MECANIQUE QUANTIQUE

# SERIE 3

**Exercice 1** : On considère une particule dans un état de moment cinétique $j = 1$ et soit $\vec{u}$ un vecteur réel de composantes $u_x$, $u_y$ et $u_z$.

1- On désigne par $\{| \varphi_m\rangle\}$ la base engendrée par les vecteurs propres de $J_z$ :

$$J_z \mid \varphi_m\rangle = m \mid \varphi_m\rangle \tag{1}$$

en unité de $\hbar$. Soit $| \Psi\rangle$ le vecteur propre normé de l'oprérateur $\vec{J} \cdot \vec{u}$ associé à la valeur propre zero. On définit $u_\pm$ par

$$u_\pm = u_x \pm i u_y. \tag{2}$$

On demande de

i) déterminer les composantes de $| \Psi\rangle$ dans la base $\{| \varphi_m\rangle\}$.

ii) montrer que $| \Psi\rangle$ peut s'écrire sous la forme :

$$| \Psi\rangle = \sum_k u_k \mid \varphi_k\rangle, \qquad k = x, y, z \tag{3}$$

où les kets $| \varphi_k\rangle$ sont des combinaisons linéaires des $| \varphi_m\rangle$. Vérifier que les $| \varphi_k\rangle$ sont des vecteurs orthogonaux.

2- Maintenant, on considère la base $\{| \varphi_k\rangle\}$ et on demande de :

i) donner les matrices représentant les opérateurs $J_k$.

ii) trouver les énergies de la particule sachant qu'elle est soumise à des forces qui se traduisent par un Hamiltonien de la forme :

$$H = \sum_k A_k J_k^2 \tag{4}$$

où les $A_k$ sont des constantes réelles.

On rappelle les résultats suivants :

$$J_\pm \mid \varphi_{j,m}\rangle = [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{\frac{1}{2}} \mid \varphi_{j,m\pm1}\rangle. \tag{5}$$

**Exercice 2** : Une particule sans spin de moment cinétique orbital $L$ se trouve dans un état $| l, m\rangle$ propre et commun à $L^2$ et $L_z$. Cette particule est soumise à un gradient de champ électrique et dont le Hamiltonien est donné par

$$H = \frac{\omega_0}{\hbar} \left(L_u^2 - L_v^2\right) \tag{6}$$



exosup.com page facebook

où $L_u$ et $L_v$ sont les composantes de $L$ sur les directions $ou$ et $ov$ du plan $xoz$ faisant $\frac{\pi}{2}$ avec les axes $ox$ et $oz$. La quantité $\omega_0$ est une constante reelle.

1- Ecrire $H$ en terme des composantes $L_x$, $L_z$ et donner la matrice représentant $H$ dans la base $\{| l, m\rangle\}$.

2- Déterminer les énergies et les états stationnaires de la particule.

3- Supposons que à l'instant $t = 0$, la particule est dans l'état :

$$| \Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| 1, 1\rangle - | 1, -1\rangle) \tag{7}$$

i) Quel est l'état $| \Psi(t)\rangle$ à un instant $t$ donné.

ii) Calculer $\langle L_z\rangle$ dans l'état $| \Psi(0)\rangle$ et puis dans l'état $| \Psi(t)\rangle$.


exosup.com



exosup.com page facebook

# SERIE N° 3.

## I. Moment Cinétique :

$|\varphi_m\rangle = |\varphi_{j,m}\rangle \qquad \{|\varphi_1\rangle, |\varphi_0\rangle, |\varphi_{-1}\rangle\}$

$J^2 |\varphi_m\rangle = j(j+1)|\varphi_m\rangle = 2|\varphi_m\rangle$

$J_z|\varphi_m\rangle = m|\varphi_m\rangle \qquad J_\pm|\varphi_{j,m}\rangle = \left[(j\mp m)(j\pm m+1)\right]^{1/2} |\varphi_{j,m\pm1}\rangle$

$\vec{J}.\vec{u}\,|\psi\rangle = 0 \qquad \langle\psi|\psi\rangle = 1 \Rightarrow |a|^2+|b|^2+|c|^2 = 1$

$|\psi\rangle = a|\varphi_1\rangle + b|\varphi_0\rangle + c|\varphi_{-1}\rangle$

$(J_x u_x + J_y u_y + J_z u_z)|\psi\rangle = 0$

1°) $J_z|\varphi_m\rangle = m|\varphi_m\rangle$

$$(J_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$J_z|\varphi_1\rangle = 1|\varphi_1\rangle$

$J_z|\varphi_0\rangle = 0 \quad$ et $J_z|\varphi_{-1}\rangle = -|\varphi_{-1}\rangle$

$$(J_+) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J_- = J_+^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(J_x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (J_y) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\vec{J}.\vec{u}) = \begin{pmatrix} u_z & \frac{u_-}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{u_+}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{u_-}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{u_+}{\sqrt{2}} & -u_z \end{pmatrix}$$

donc $\vec{J}.\vec{u}\,|\psi\rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_z a + \frac{u_-}{\sqrt{2}} b = 0 \\ \frac{u_+}{\sqrt{2}} a + \frac{u_-}{\sqrt{2}} c = 0 \\ \frac{u_+}{\sqrt{2}} b - u_z c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = -\frac{u_-}{u_z\sqrt{2}} \\ \frac{a}{c} = -\frac{u_-}{\sqrt{2}\,u_+} \\ \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{2}\,u_z}{u_+} \end{cases}$

or on a : $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$

$\Rightarrow b^2\left(1 + \frac{|u_-|^2}{2u_z^2} + \frac{|u_+|^2}{2u_z^2}\right) = 1$

$\Rightarrow |b| = u_z \longrightarrow b = u_z e^{i\varphi}$

exosup.com page facebook

b) $|\psi\rangle = \sum_k u_k |\varphi_k\rangle = u_x|\varphi_x\rangle + u_y|\varphi_y\rangle + u_z|\varphi_z\rangle \qquad k = x, y, z.$

$$|\psi\rangle = u_x\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_{-1}\rangle - |\varphi_{+1}\rangle\right)\right] + u_y\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_{-1}\rangle + |\varphi_{+1}\rangle\right)\right] + u_z|\varphi_0\rangle$$

$$|\varphi_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_{-1}\rangle - |\varphi_{+1}\rangle\right)$$

$$|\varphi_y\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_{-1}\rangle + |\varphi_{+1}\rangle\right)$$

$$|\varphi_z\rangle = |\varphi_0\rangle$$

On vérifie que : $\langle\varphi_y|\varphi_x\rangle = \langle\varphi_z|\varphi_y\rangle = 0$ et que $\langle\varphi_x|\varphi_y\rangle = 0$

2°) a) On considère la base $\{|\varphi_k\rangle\}$.

$J_k$ avec $k = x, y, z$

(*) $J_z|\varphi_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|\varphi_{-1}\rangle - |\varphi_{+1}\rangle\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_{-1}\rangle + |\varphi_{+1}\rangle\right) = i|\varphi_y\rangle$

$J_z|\varphi_y\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(-|\varphi_{-1}\rangle + |\varphi_{+1}\rangle\right) = \frac{-i}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_{-1}\rangle - |\varphi_{+1}\rangle\right) = -i|\varphi_x\rangle$

$J_z|\varphi_z\rangle = J_z|\varphi_0\rangle = 0.$

$$J_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(**) $J_x|\varphi_x\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(J_+ + J_-\right)\left(|\varphi_{-1}\rangle - |\varphi_{+1}\rangle\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(J_+|\varphi_{-1}\rangle - J_-|\varphi_{+1}\rangle\right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}|\varphi_0\rangle - \sqrt{2}|\varphi_0\rangle\right) = 0.$

$J_x|\varphi_y\rangle = i|\varphi_z\rangle$

$J_x|\varphi_z\rangle = -i|\varphi_y\rangle$.

$$(J_x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Idem

$$(J_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $H = \sum A_k J_k^2$ (les $A_k$ sont des ctes réelles)

$= A_x J_x^2 + A_y J_y^2 + A_z J_z^2$

$$(J_x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (J_y^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (J_z^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} A_y + A_z & 0 & 0 \end{vmatrix}$ les energies sont donc

exosup.com page facebook

B/ $H = \frac{\omega_0}{\hbar}\left(L_u^2 - L_v^2\right)$

1°/ $\vec{L} = L_x\vec{i} + L_z\vec{k}$

$\vec{L} = L_u\vec{u} + L_v\vec{v}$

$\begin{cases} L_u = L_x\cos\alpha + L_z\sin\alpha \\ L_v = -L_x\sin\alpha + L_z\cos\alpha \end{cases}$ $\alpha = 45°$ $\begin{cases} L_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(L_x + L_z) \\ L_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(L_z - L_x) \end{cases}$

$$H = \frac{\omega_0}{2\hbar}\left\{(L_x+L_z)^2 - (L_z - L_x)^2\right\} = \frac{\omega_0}{\hbar}\left(L_xL_z + L_zL_x\right)$$

$$\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}.$$

$$L_z = \hbar\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \quad L_x = \frac{\hbar\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$L_xL_z = \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar^2\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad L_zL_x = \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar^2\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow H = \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

(colonnes : $|1,1\rangle$ $|1,0\rangle$ $|1,-1\rangle$)

2°/ $\det(H - \lambda I) = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda^2 - \hbar^2\omega_0^2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \hbar\omega_0 ; \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -\hbar\omega_0$

$\lambda_i \longrightarrow |\varphi_i\rangle = \alpha_i|1,1\rangle + \beta_i|1,0\rangle + \gamma_i|1,-1\rangle$

$\lambda_1 \longrightarrow |\varphi_1\rangle = \frac{1}{2}|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle - \frac{1}{2}|1,-1\rangle$

$\lambda_2 \longrightarrow |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|1,1\rangle + |1,-1\rangle\}.$

$\lambda_3 \longrightarrow |\varphi_3\rangle = \frac{-1}{2}|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{2}|1,-1\rangle$

3°/ a- $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle - |1,-1\rangle\right)$, $|\psi_t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi_0\rangle$

on remarque que : $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_1\rangle - |\varphi_3\rangle\right)$

sachant que $H|\varphi_1\rangle = \hbar\omega_0|\varphi_1\rangle$ et $H|\varphi_3\rangle = -\hbar\omega_0|\varphi_3\rangle$.

$\Rightarrow |\psi_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t}|\varphi_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{+i\omega_0 t}|\varphi_3\rangle$

$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}$ et $C_3 = -C_1^*$

exosup.com page facebook

b -

$$\langle L_z \rangle_0 = \langle \psi_0 | L_z | \psi_0 \rangle$$

$$L_z |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big( |1,1\rangle + |1,-1\rangle \Big) = |\varphi_2\rangle$$

$$\langle L_z \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big( \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle - \langle \varphi_3 | \varphi_2 \rangle \Big) = 0 \quad \underline{\text{ou}} \quad \langle L_z \rangle_0 = \frac{1}{2} (1 - 1) = 0$$

$$\langle L_z \rangle_t = \langle \psi_t | L_z | \psi_t \rangle$$

$$L_z |\psi_t\rangle = c_1 L_z |\varphi_1\rangle + c_3 L_z |\varphi_3\rangle = c_1 \left( \tfrac{1}{2} |1,1\rangle + \tfrac{1}{2} |1,-1\rangle \right) + c_3 \left( -\tfrac{1}{2} |1,1\rangle - \tfrac{1}{2} |1, \ldots \right.$$

$$= \frac{c_1}{\sqrt{2}} |\varphi_2\rangle - \frac{c_3}{\sqrt{2}} |\varphi_2\rangle$$

$$\langle L_z \rangle_t = \frac{|c_1|^2}{\sqrt{2}} \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle - \frac{|c_3|^2}{\sqrt{2}} \langle \varphi_3 | \varphi_2 \rangle = 0$$

$\Longrightarrow$ $L_z$ est constante du mvt.

T. E

$$\frac{d}{dt} \langle L_z \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [L_z, H] \rangle$$

$$[L_z, H] = \frac{\omega_0}{\hbar} [L_z, L_x L_z + L_z L_x] = \frac{\omega_0}{\hbar} \Big\{ [L_z, L_x L_z] + [L_z, L_z L_x \ldots$$

$$= \frac{\omega_0}{\hbar} \Big\{ [L_z, L_x] L_z + L_z [L_z, L_x] \Big\}$$

$$= \frac{\omega_0}{\hbar} \Big\{ i\hbar L_y L_z + i\hbar L_z L_y \Big\} \neq 0$$

$$H |\varphi_i\rangle = \lambda_i |\varphi_i\rangle \longrightarrow \langle \varphi_i | H = \lambda_i \langle \varphi_i |$$

$$\langle \varphi_i | [L_z, H] | \varphi_i \rangle = \langle \varphi_i | L_z H | \varphi_i \rangle - \langle \varphi_i | H L_z | \varphi_i \rangle$$

$$= \lambda_i \Big\{ \langle \varphi_i | L_z | \varphi_i \rangle - \langle \varphi_i | L_z | \varphi_i \rangle \Big\} = 0$$

exosup.com page facebook